5.2 Adi Nokta Civarında Seri Çözümleri

Daha önceki bölümlerde sabit katsayılı 2. mertebeden lineer dif. denklemlerin çözümünü gördük. Şimdi katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları olan 2. mertebeden dif. denklemlerin çözüm yöntemini düşünelim. Homojen olmayan denklemlerde de yaptığımız işlemler aynı olacağı için homojen denklemleri düşünmek yeterli olacaktır. Buna göre homojen

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (5.1)$$

2. mertebe dif. denklemini ele alalım ve hesaplarımızı kolaylaştırması açısından P, Q, R fonksiyonlarını ortak çarpanları olmayan polinomlar olarak düşünelim. (5.1) denklemini bir x_0 noktası

civarında çözmek istiyelim. x_0'ı içeren bir aralıkta (5.1)'in çözümü aralıkta P'nin davranışı ile yakından ilgilidir.

$P(x_0)\neq 0$ olan x_0 noktasına <u>adi nokta</u> denir. P sürekli olduğundan, $P(x)$'in sıfır olmadığı x_0'ı içeren bir aralık vardır. Bu aralıkta (5.1) denklemini $P(x)$'e bölersek $p(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ ve $q(x)=\dfrac{R(x)}{P(x)}$ olmak üzere

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (5.2)$$

denklemini elde ederiz. Varlık ve teklik teoremine göre bu aralıkta y_0 ve y_0' keyfi olmak üzere başlangıç koşullarını $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ da sağlayan tek bir çözüm vardır.

Diğer taraftan, eğer $P(x_0)=0$ ise x_0'a (5.1)'in bir tekil noktası denir. Bu durumda en azından $Q(x_0)$ veya $R(x_0)$ farklı sıfır olmalıdır. Sonuçta (5.2) denkleminde p veya q'dan birisi sınırsız olacağından varlık ve teklik teoremini uygulayamayız.

Şimdi (5.1) denklemini adi nokta civarında çözmeye çalışalım. Çözümü

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad (5.3)$$

formunda arıyalım. Serinin $\rho>0$ olmak üzere $|x-x_0|<\rho$ aralığında yakınsak olduğunu kabul edelim. y, y', y'' değerlerini (5.1) denkleminde yerine koyarak a_n katsayılarını bulabiliriz.

Örnek: $y''+y=0$, $-\infty<x<\infty$ dif. denklemini seri çözümü ile bulunuz.

Bu denklemin iki lineer bağımsız çözümü $\sin x$ ve $\cos x$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu denklemi seri yöntemini kullanarak çözmeye gerek yoktur. Fakat kuvvet serilerinin uygulanışını görmek açısından iyi bir örnektir. $P(x)=1$, $Q(x)=0$, $R(x)=1$ olduğundan her nokta adi noktadır. Çözümü $x_0=0$ noktasında arıyalım. $\rho>0$ olmak üzere $|x|<\rho$ aralığında

$$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

yakınsak olsun.

$$y'=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=2a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$y''+y=0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \quad , n=0,1,2,\ldots$$

Bu denkleme <u>indirgeme bağıntısı</u> denir.

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$a_2 = \frac{-1}{2}a_0 \,,\quad a_4 = \frac{-1}{4\cdot 3}a_2 = \frac{1}{4.3.2.1}a_0 \,,\quad a_6 = \frac{-1}{6\cdot 5}a_4 = \frac{-1}{6.5.4.3.2.1}a_0 = \frac{-1}{6!}a_0$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a_0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$a_3 = \frac{-1}{3.2}a_1 \,,\quad a_5 = \frac{-1}{5\cdot 4}\cdot a_3 = \frac{1}{5.4.3.2}a_1 = \frac{1}{5!}a_1 \qquad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}a_1$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$= a_0 + a_1x + \left(-\tfrac{1}{2}\right)a_0x^2 + \left(-\tfrac{1}{3!}\right)a_1x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}a_0x^{2n} + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}a_1x^{2n+1} + \cdots$$

$$= a_0\left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!} + \cdots\right) + a_1\left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right)$$

$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Yakınsaklık aralığına baktığımızda her iki serininde her x için yakınsak olduğunu görürüz. Birinci seri $\cos x$'in ikinci seri $\sin x$'in $x=0$'da Taylor serisidir. Bu yüzden çözümü

$$y = a_0\cos x + a_1\sin x$$

olarak elde ederiz. a_0 ve a_1 üzerine bir şart konmadığından a_0 ve a_1 keyfi değerlerdir.

2) $y'' - xy' - y = 0$ dif. denklemini $x_0 = 0$'da kuvvet serisine açarak genel çözümünü bulunuz.

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

denklemde yerine konursa

$$y'' - xy' - y = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - a_0 = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - a_n \right] x^n = 0$$

$$2a_2 - a_0 = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - a_n = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$$

(indirgeme bağıntısı)

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{1}{n+2} a_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} a_0, \ldots, \quad a_{2n} = \frac{1}{2^n n!} a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1, \quad a_5 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3} a_1, \ldots, \quad a_{2n+1} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} a_1$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{3} a_1 x^3 + \cdots + \frac{1}{2^n n!} a_0 x^{2n} + \frac{2^n n!}{(2n+1)!} a_1 x^{2n+1} + \cdots$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

3) $y'' - xy' - y = 0$ dif. denklemini $x=1$'de kuvvet serisine açarak her iki lineer bağımsız çözümün ilk dört terimini yazınız.

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

denklemde yerine konursa

$$y'' - xy' - y = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} - \underset{\substack{\Downarrow \\ x=(x-1+1)}}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n$$

$$2a_2 - a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_{n+1} - n a_n - a_n \right] (x-1)^n = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_{n+1} - (n+1) a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

indirgeme bağıntısı.

$$y = a_0 + a_1(x-1) + \left(\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}a_0\right)(x-1)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{6}a_0\right)(x-1)^3 + \left(\tfrac{1}{4}a_1 + \tfrac{1}{6}a_0\right)(x-1)^4 \dots$$

$$= a_0 \left(1 + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{6}(x-1)^3 + \tfrac{1}{6}(x-1)^4 + \dots \right)$$

$$+ a_1 \left((x-1) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(x-1)^3 + \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \right)$$

4) $y''-xy'-y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ başlangıç değer probleminin sıfırdan farklı ilk beş terimini yazınız. Çözümün ilk dört ve ilk beş terimine göre yaklaşımlarının grafiklerini aynı eksende çiziniz.

2. soruda $y''-xy'-y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak bulmuştuk.

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\dots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5+\dots\right)$$

$$y'=a_0\left(x+\frac{1}{2}x^3+\dots\right)+a_1\left(1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\dots\right)$$

$x=0,\ y=2 \Rightarrow 2=a_0$

$x=0,\ y'=1 \Rightarrow 1=a_1$

Çözüm,

$$y=2\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\dots\right)+\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5+\dots\right)$$
$$=2+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\dots$$

$y=2+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4$

$y=2+x+x^2+\frac{1}{3}x^3$